

每周工作汇报

姓名	侯宇轩	开始日期	2019.3.26	结束日期	2019.4.1
----	-----	------	-----------	------	----------

1. 本周任务与计划

1.1 研究任务

阅读蔡老师布置的论文：PDE-Net: Learning PDEs from Data，学习其中的方法，思考如何用其对 level-set 进行改进。

2. 本周工作概要

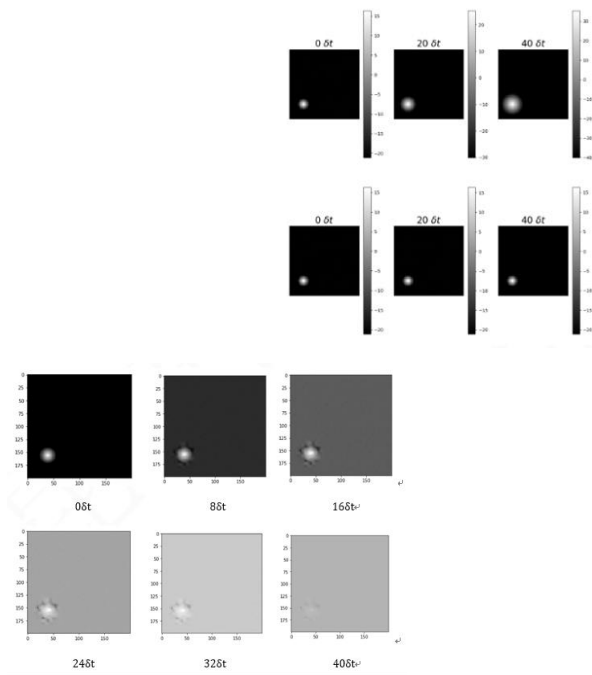
2.1 当前的进展

本周工作

目标：使用 PDE-net 将 Level set 分割正圆的过程学习出来

上周发现，使用 PDE-net 预测的系数 $C_{00}, C_{01}, C_{10}, C_{20}, C_{11}, C_{02}$ ，使用传统数值方法计算的结果与 PDE-net 预测的演化结果相差较大。

左上：正确结果 左下：PDE-net 预测演化 右：使用预测系数+传统数值方法计算结果



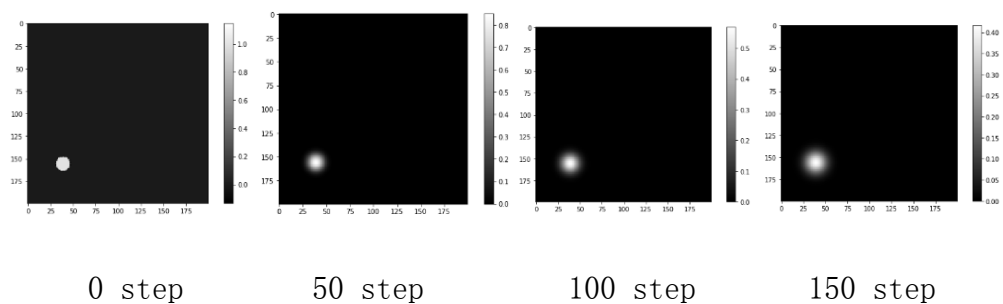
因此，本周尝试用已知系数的传统数值方法生成数据，再输入到 PDE-net 中，看是否能学到正确的系数。

采用的微分方程如下：

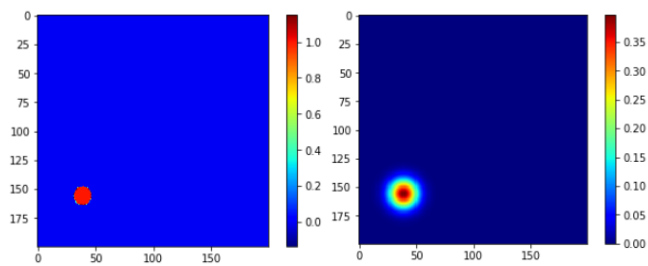
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

即 laplace 方程，对应的 C02\C20 为全 1，其他系数为全 0.

生成的训练数据如下：



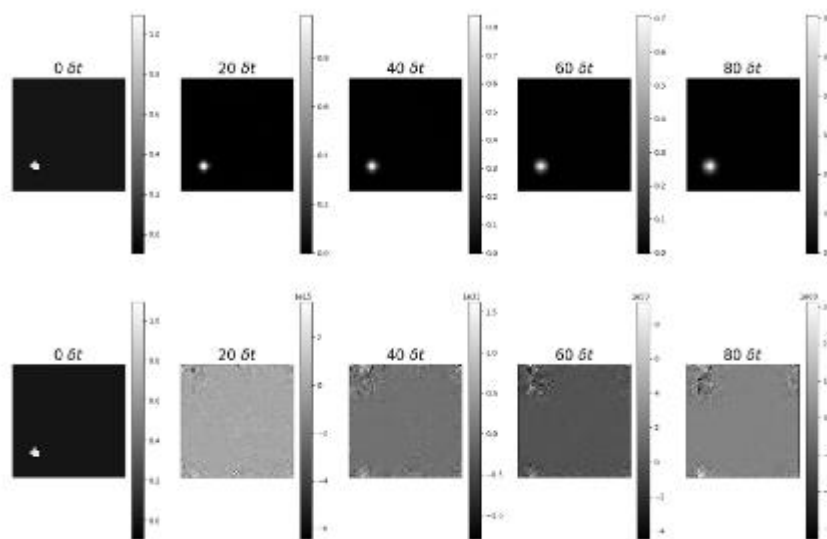
以灰度图像看，差别不是很明显，150step 图像用彩色编码显示如下：



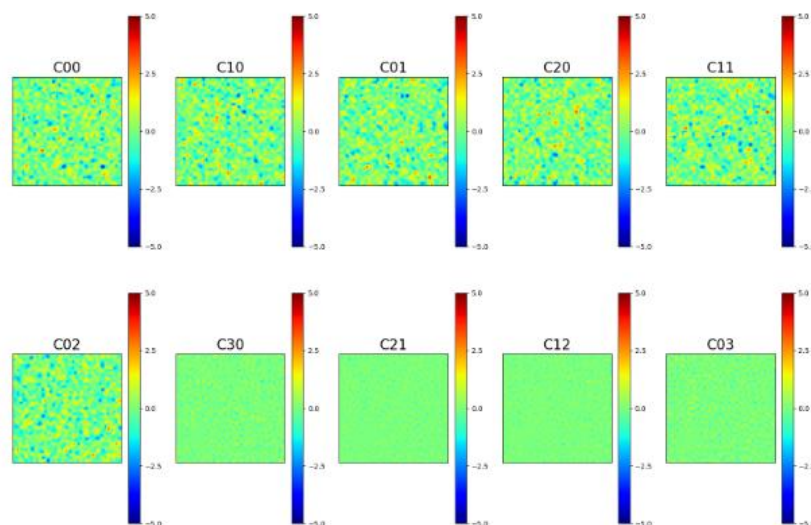
0 step

150 step

输入 PDE-net 训练得到预测结果如下：



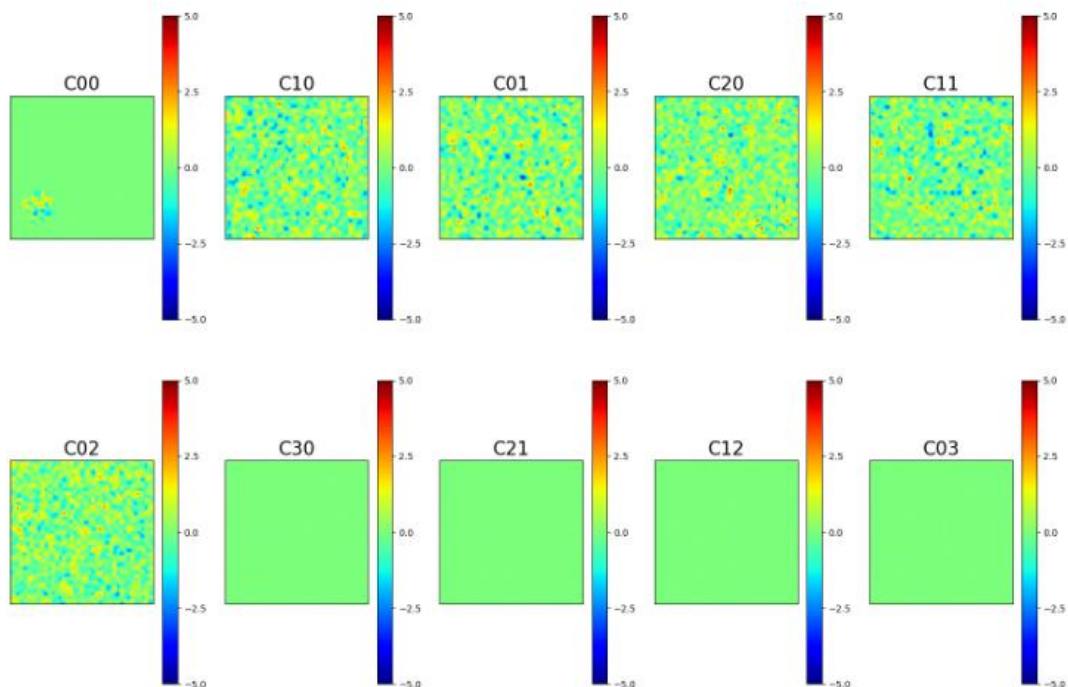
学习系数如下：



理论上，本次的数据/模型比上周的更为简单，理应学习效果更好；然而出现学习到的系数全为噪声的情况。可能的原因有二：

1. 为增加鲁棒性，PDE-net 会向训练数据中添加噪声，可能修改数据后，噪声的幅度相比数据的梯度变的更大，导致学习到的是噪声。
2. 本次训练修改了每一 step 的间隔时间，从 0.015 增长至 0.2。PDE-net 可能无法承受间隔时间 dt 过大(因为其预测过程是使用 $dt \times$ 预测的系数来计算)，数值上可能不稳定。

此外，上周 PDE-net 中提取模型参数如下：



微分方程模型：（预测模型在 2 阶以上系数基本为 0）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{00}u + C_{10}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{01}\frac{\partial u}{\partial y} + C_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

该形式为线性对流-扩散方程。

PDE-net 原文中有另一个方程形式：（含非线性源的线性扩散方程）

We consider a 2-dimensional linear diffusion equation with a nonlinear source on $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$,

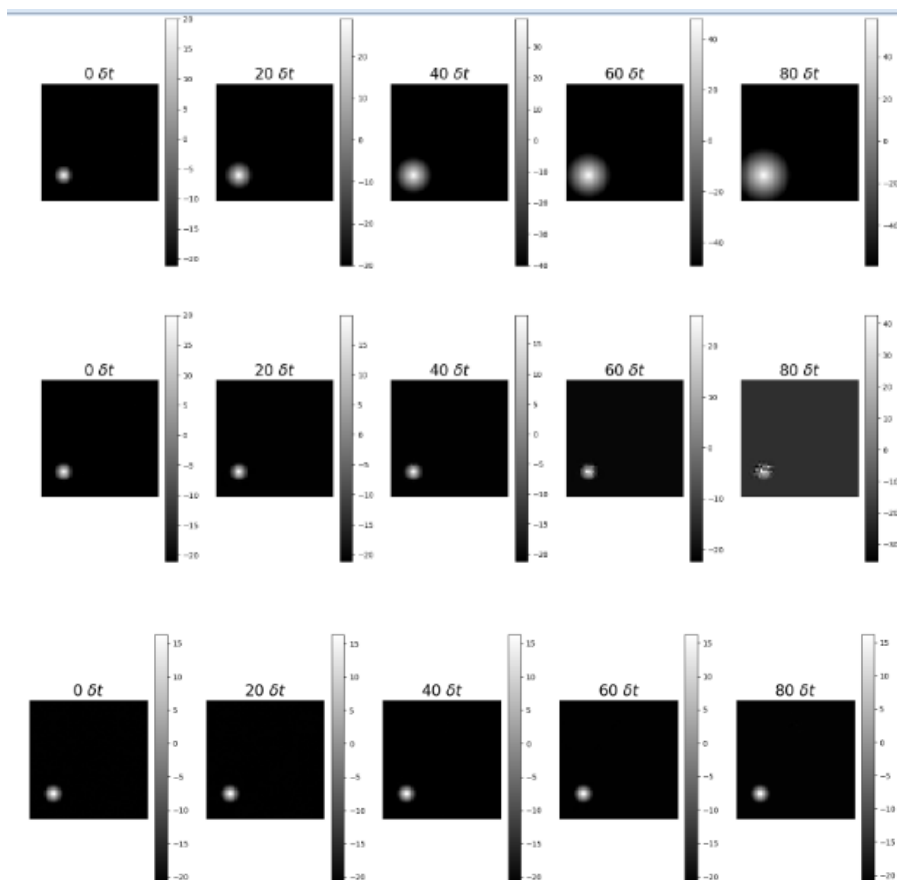
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u + f_s(u), & \text{with } (t, x, y) \in [0, 0.2] \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \textcolor{yellow}{f_s(u)} + C_{00}u + C_{10}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{01}\frac{\partial u}{\partial y} + C_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

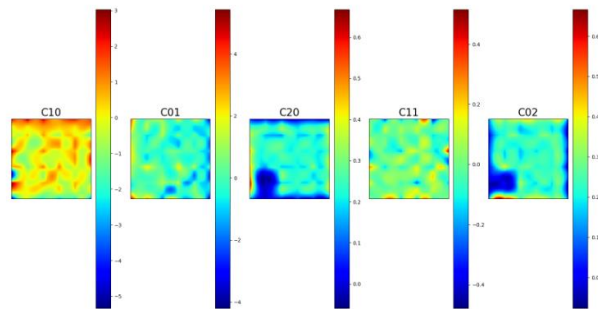
相比之下，多了非线性的源，但是该源只与 u 有关，与 x, y 无关。

使用相同的数据训练，预测得结果如下：



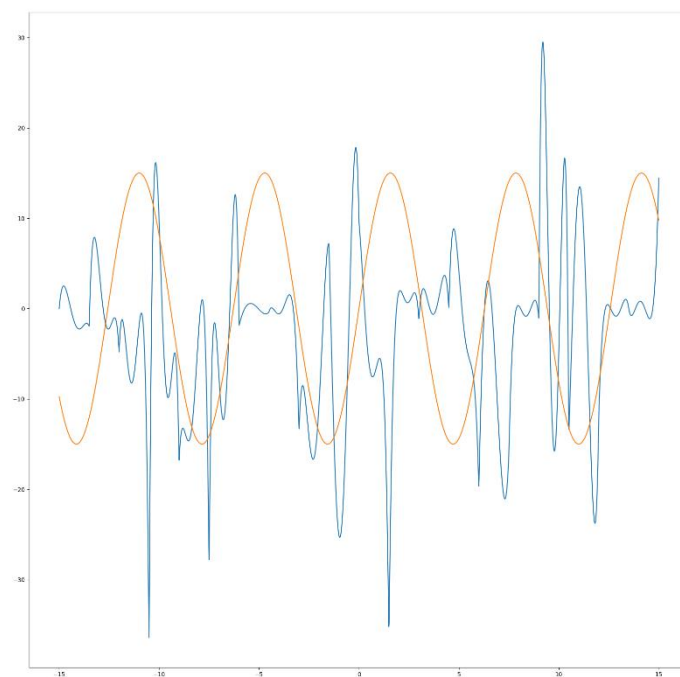
第一行：正确结果 第二行：非线性模型预测 第三行：上周线性模型预测

预测得到的系数如下：

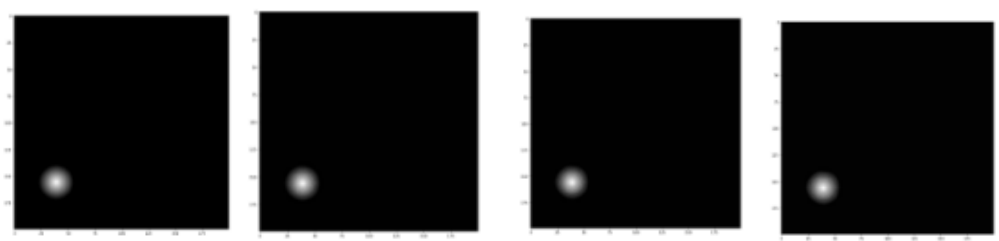


发现在二阶导数项的系数呈现出明显的特征。（而线性对流-扩散方程是 C00 项有圆形特征）

非线性源项预测如下：（蓝色为预测，黄色为参考线 $f(u) = 15 \sin u$ ）



使用数值方法+该方程的预测系数计算结果如下：



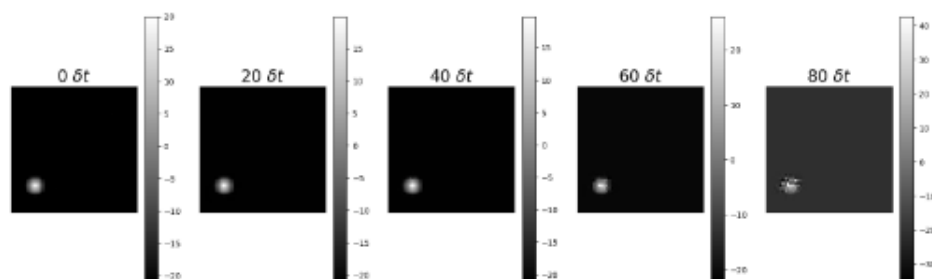
0 step

50 step

100 step

150 step

与刚刚 PDE-net 预测结果相比（如下），似乎更稳定，但是都不扩张，总体相差不大。



3. 下周工作计划

1. 观察噪声与预测结果的关系。
2. 观察微分方程演化时间间隔 dt 与解的稳定性的关系。

附表：工作整理

任务类型	任务内容	截止日期	当前进度
工作	PDE-net 与 level set 的结合		<p>蔡老师提出新方法：使用偏微分方程网络 PDE-net 对 level set 进行改进。</p> <p>现在正在对网络参数进行修改。</p>

本周工作时长：10 小时*7 = 70 小时。